

正交多项式在不确定转子动态响应 计算中的应用及对比分析

傅超¹, 任兴民¹, 杨永锋¹, 邓旺群²

(1. 西北工业大学 振动工程研究所, 西安 710072;

2. 中国航空发动机集团有限公司 湖南动力机械研究所, 湖南 株洲 412002)

摘 要: 为研究航空发动机转子系统中的区间不确定性对系统动态响应的影响,提出利用正交多项式求解不确定转子响应的非嵌入式区间分析法,克服了传统概率方法需要参数先验概率分布的苛刻要求。用有限元法建立了悬臂转子的确定性运动方程,阐述了 Chebyshev 和 Legendre 两种正交多项式建立响应代理模型的原理和计算步骤。通过与 Monte Carlo 抽样对比,验证方法的可行性和精度。对照 Monte Carlo 方法 500 样本的计算结果,两种多项式区间法计算结果都具有较高精度,误差均小于 1%,而计算时间则分别为 Monte Carlo 法的 2.5% 和 5.4%,Chebyshev 多项式方法具有更高的计算效率。分析了不同不确定参数在不同不确定水平下,系统的响应范围。研究表明,正交多项式区间分析法可高精度高效率地计算转子系统区间响应范围,不确定性对该转子系统动力特性影响很大,多源不确定性传播可引起转子系统大幅振动。

关 键 词: 转子系统; 不确定参数; 区间分析法; 正交多项式; 动态响应

中图分类号: V231.96

文献标志码: A

Application and comparative analysis of orthogonal polynomials in uncertain rotor dynamic response calculation

FU Chao¹, REN Xingmin¹, YANG Yongfeng¹, DENG Wangqun²

(1. Institute of Vibration Engineering,

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Hunan Aviation Powerplant Research Institute,

Aero Engine Corporation of China, Zhuzhou Hunan 412002, China)

Abstract: In order to quantify the influence of interval uncertainties on the dynamic response of a rotor system, a non-intrusive interval analysis procedure was proposed using orthogonal polynomials, so the strict requirements of probabilistic distribution in stochastic methods were met. The deterministic model and equations of motion were established via the finite element method. The surrogate models of the uncertain response were derived by using Chebyshev polynomials and Legendre polynomials and the general solution procedure was illustrated. The classic Monte Carlo simulation was used to demonstrate the accuracy and efficiency of the two series based interval methods. Compared with the results of Monte Carlo simulation with 500 samples, the errors in the interval methods were less than 1% and the computing time were 2.5% and 5.4%, respectively. In the problem under study, the Che-

收稿日期: 2017-04-15

基金项目: 航天科技创新基金(2016KC060013); 西北工业大学研究生创意种子基金(Z2017119)

作者简介: 傅超(1990—),男,博士生,主要从事转子动力学研究。

引用格式: 傅超,任兴民,杨永锋,等. 正交多项式在不确定转子动态响应计算中的应用及对比分析[J]. 航空动力学报,2018,33(9): 2228-2234. FU Chao, REN Xingmin, YANG Yongfeng, et al. Application and comparative analysis of orthogonal polynomials in uncertain rotor dynamic response calculation[J]. Journal of Aerospace Power, 2018, 33(9): 2228-2234.

byshev polynomials based method was more efficient. Then the dynamic response curves of the rotor under different uncertain parameters with different uncertain degrees were given. The results show that the orthogonal polynomials can be successfully applied to uncertain rotor-dynamics with high efficiency and accuracy. Uncertainty has significant effects on the dynamics of the rotor system and multiple uncertainties propagation may lead to heavy vibration.

Key words: rotor system; uncertain parameters; interval methods; orthogonal polynomials; dynamic response

动力特性分析是转子动力学研究的重要内容,它贯穿于发动机转子设计和使用的整个过程。国内外已经进行了许多关于转子动力特性研究^[1-5],主要集中于确定性模型。实际上,不确定性客观存在于实际工程结构中,为了得到更精确和合理的计算结果,在结构的动态特性分析中应该考虑不确定性因素的影响。对于转子系统而言,从设计、制造到安装、运行各阶段,由于环境变化、材料分散性、安装与测量误差等都会引入不确定性。它们将导致原本确定性的运动方程变为带有不确定性项的组合方程,无法用传统方法进行求解。数学上针对不确定性问题,一般用概率模型、模糊模型和非概率模型来处理,三者对模型中不确定参数的具体概率分布限定的程度依次变松。目前已有一部分学者,关注到了转子系统中的不确定性问题,大多通过假定不确定参数的概率分布采用随机概率模型进行不确定性分析^[6-13]。然而,困难在于,不确定参数的精确概率分布是很难获取的,或者没有足够的统计信息来假设其具体的概率模型。少数文献利用模糊数学和非概率方法研究不确定转子系统的动力学特性^[14-18],得到了一些有益结论,但需改进原有的确定性求解方法,不易实现。近年来发展起来的配点型非嵌入式区间分析法,将正交多项式逼近理论和区间数学结合在一起,在固体力学、计算流体力学和多体动力学领域取得了应用^[19-21]。这类区间分析法将不确定参数视为未知而有界的区间数,借助数学中的多项式逼近理论进行求解。计算时只需获取参数的分布范围即可,这一般来说是容易实现的。它降低了概率方法的先验要求,同时不引入人为假设;另外,基于正交多项式逼近的区间算法能有效控制过估计,同时相对于摄动法,更适用于较大不确定性问题。

本文考虑参数不确定性,将 Chebyshev 和 Legendre 正交多项式引入到一悬臂转子的区间动力特性分析中,给出基于两种多项式的计算步

骤。采用 Monte Carlo 模拟,在不同转速下,对比两种方法计算转子动态响应区间的精度和效率。最后分析了多个不确定参数在不同不确定水平下转子系统的动态响应边界。

1 转子系统及运动方程

图 1 所示为某悬臂转子模型,质量盘位于弹性轴最右端,系统由两个弹性支承支撑。假设转子轴和支承各向同性,不考虑轴上的不平衡。本文采用有限元法离散该系统,将质量盘视为外激励和力矩形式加到对应节点上。

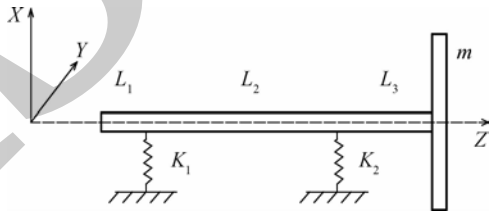


图 1 转子模型示意图
Fig. 1 Schematic diagram of the rotor

组装各个单元矩阵后,该转子系统的运动微分方程一般形式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{M}$ 为质量矩阵;系统广义阻尼矩阵可写作 $\hat{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{C} + \omega \mathbf{G}$, ω 为系统转速, $\mathbf{G}$ 代表非对称陀螺矩阵, $\mathbf{C}$ 为阻尼矩阵; $\mathbf{K}$ 为系统刚度矩阵; $\mathbf{F}(t)$ 为系统激励; $\mathbf{U}(t)$, $\dot{\mathbf{U}}(t)$, $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ 分别代表位移、速度和加速度向量。

2 基于正交多项式的区间分析法

式(1)建立的是确定性的运动控制方程。考虑到转子系统不确定性,本节引入区间分析法计算不确定动力响应范围。将系统不确定参数视为区间数,按照区间格式写作

$$q^I = [\underline{q}, \bar{q}] = [q^c - \beta q^c, q^c + \beta q^c] \quad (2)$$

式中 q^I 定义区间数, β 定义该参数的不确定水平,

q^c 、 q^- 和 q^+ 分别代表中值、下界和上界。为方便书写,把所有不确定参数写在一起组成不确定参数向量 $\mathbf{q}=\{q_i\}$, 其中 $i=1,2,\cdots,r$ 。原系统运动方程各项均与不确定参数向量中的某个或者某几个元素有关,则考虑不确定性的系统运动微分方程可写为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{U}}(\mathbf{q},t)+\mathbf{C}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{q},t)+\mathbf{K}(\mathbf{q},t)\mathbf{U}(\mathbf{q},t)=\mathbf{F}(\mathbf{q},t) \tag{3}$$

式(3)的解可理解成在区间参数向量 $\mathbf{q}\in\mathbf{q}^I=[\underline{\mathbf{q}},\overline{\mathbf{q}}]$ 约束条件下,原运动方程式(1)所示初值问题的区间解^[18]。其解可表示为

$$\mathbf{U}^I=\{\mathbf{U};\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}+\mathbf{K}\mathbf{U}=\mathbf{F},\mathbf{U}(t_0)=\mathbf{U}_0,\mathbf{q}\in\mathbf{q}^I\} \tag{4}$$

式中 $\mathbf{U}_0$ 为系统初值, $\mathbf{U}^I$ 为动态响应区间。

如果直接应用区间运算对其进行推算,将导致得到的解响应范围过大,而失去估计的意义。已有研究指出,利用泰勒级数展开逼近方程不确定解也会导致较大的过估计^[20]。而基于正交多项式逼近原理的区间分析法,具有高效、非嵌入式的特点,求解的区间响应相对紧包真实上下界。

2.1 Chebyshev 正交多项式逼近

第一类 Chebyshev 正交多项式为

$$C_n(x)=\cos(n\arccos x),x\in[-1,1] \tag{5}$$

式中 n 为非负整数。 $\{C_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 上关于权函数 $\rho(x)=\sqrt{1-x^2}$ 正交。写成递推格式为

$$\begin{cases} C_0(x)=1 \\ C_1(x)=x \\ \vdots \\ C_{n+1}(x)=2xC_n(x)-C_{n-1}(x) \end{cases},n=1,2,\cdots \tag{6}$$

基于 Chebyshev 正交多项式的连续函数 $f(x)$ 在标准区间 $[-1,1]$ 上的逼近表达式可表示成

$$\hat{f}_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^Na_iC_i(x),x\in[-1,1] \tag{7}$$

式中 a_i 为展开系数,下标 i 表示展开的第 i 阶, N 是展开阶数。各系数可表示成积分形式

$$a_i=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^1\frac{\hat{f}(x)C_i(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{8}$$

此积分可通过 Gauss-Chebyshev 积分公式求得

$$\int_{-1}^1f(x)C_i(x)dx=\sum_{j=0}^{\lambda}A_jf(x_j)C_i(x_j) \tag{9}$$

式中 A_j 和 λ 分别为积分系数和所用的积分点数。对于 Gauss-Chebyshev 积分,其积分点 x_j 由高阶 Chebyshev 多项式的根给出

$$x_j=\cos\left(\frac{2j-1}{2m}\pi\right),j=1,2,\cdots,\lambda \tag{10}$$

由此过程,可建立基于 Chebyshev 正交多项式的函数逼近表达式。

2.2 Legendre 正交多项式逼近

Legendre 正交多项式递推公式可表示为

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,n=1,2,\cdots \end{cases} \tag{11}$$

$\{P_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 上关于权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 正交。设 $g(x)$ 为 $[-1,1]$ 上的连续函数,定义欧氏空间的内积运算

$$\langle g,P_n\rangle:=\int_{-1}^1g(x)P_n(x)dx \tag{12}$$

对于 Legendre 多项式本身,有

$$\langle P_n,P_s\rangle=\frac{2}{2n+1}\delta_{ns} \tag{13}$$

式中 n 和 s 均为非负整数, δ_{ns} 表示 Kronecker 积。基于 Legendre 正交多项式的一元函数 $g(x)$ 逼近表达式为

$$\hat{g}_N(x)=\sum_{n=0}^N\frac{\langle g,P_n\rangle}{\langle P_n,P_n\rangle}P_n \tag{14}$$

式中 N 为展开阶数。同样,类似于 Chebyshev 多项式,内积 $\langle g,P_n\rangle$ 可通过 Gauss-Legendre 积分公式进行数值计算

$$\int_{-1}^1g(x)P_n(x)dx=\sum_{j=0}^{\lambda}B_jg(x_j)P_n(x_j) \tag{15}$$

式中 x_j 和 B_j 分别为积分点和求积系数。这些积分点和积分系数都是预先设定好的,可通过查表得知。通过上述过程,可建立基于 Legendre 多项式的函数逼近表达式。

2.3 基于正交多项式的不确定转子响应计算步骤

利用正交多项式进行不确定问题求解过程可以概括为以下几个主要步骤:

1) 首先对一维情形进行分析。针对不确定参数向量中的参数 $q_i(i=1,2,\cdots,r)$,求解正交多项式 Gauss 积分点。对于实际转子系统而言,物理参数可能具有任意分布,这时只需作相应的转换。假设 q_i 实际区间范围为 $[a,b]$, a 和 b 均为正数且 $a<b$,则

$$\tilde{x}=\frac{2q_i-(a+b)}{b-a},\tilde{x}\in[-1,1],q_i\in[a,b] \tag{16}$$

注意,线性变换不改变连续可微函数的相对极值点位置。

2) 利用 Newmark- β 数值方法,计算确定性运动方程在 Gauss 积分点 q_{ij} 处的确定性数值解

$$\begin{aligned} &\tilde{U}(q_{ij}) = \\ &\{U; M\dot{U} + C\dot{U} + KU = F, U(t_0) = U_0, q_i = q_{ij}\} \end{aligned} \tag{17}$$

式中,系统不确定参数向量除 q_i 外,均取中值即确定值, q_{ij} 表示 q_i 的第 j 个积分点。即式(17)为一组确定性方程,规模和结构均与式(1)相同。

3) 根据逼近理论,利用响应积分点处的响应解 $\tilde{U}(q_{ij})$ 求得多项式展开各项系数,得到一维不确定情形方程(3)的多项式 N 阶逼近表达式 $\Gamma_N(q_i)$,为了保证精度,积分点数应满足

$$\lambda \geq N + 1 \tag{18}$$

4) 依据连续函数闭区间最值定理,对 $\Gamma_N(q_i)$ 在 q_i 取值范围内,联合两端点,求最大最小函数值,并记录此时的自变量取值 $q_{i,\min}$ 和 $q_{i,\max}$ 。

5) 对每一个不确定参数,按照上述求解流程 1)~4) 求解一遍,获得含 r 个最大、最小值不确定位置元素的向量 $q_{\min}$ 和 $q_{\max}$ 。此时,含多个不确定参数转子系统的动态响应边界就可求解以下两个确定方程求得

$$\begin{aligned} &M(q_{\min})\ddot{U}(q_{\min},t) + C(q_{\min})\dot{U}(q_{\min},t) + \\ &K(q_{\min},t)U(q_{\min},t) = F(q_{\min},t) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &M(q_{\max})\ddot{U}(q_{\max},t) + C(q_{\max})\dot{U}(q_{\max},t) + \\ &K(q_{\max},t)U(q_{\max},t) = F(q_{\max},t) \end{aligned} \tag{20}$$

通过区间分析法,原不确定性动力特性求解问题,已完全转化为一组确定性方程,变为常规动力学问题。数值求解式(19)和式(20)即可确定含不确定参数的转子系统动态响应范围。需要注意的是,该方法适用的前提是各区间不确定参数相互独立^[19]。

3 数值仿真

3.1 确定性系统稳态响应

数值计算时,图 1 所示悬臂转子具体物理参数如表 1 所示。基于这些确定的参数,采用 Newmark- β 数值方法计算可得到传统意义上的转子稳态响应如图 2 所示。

该转子系统的前两阶临界转速分别为 1087.5 r/min 和 4361.2 r/min,共振幅值分别为 9.10×10^{-4} m 可与 2.89×10^{-4} m。可以看到,相比于第 1 阶,第 2 阶振动很小且距离第 1 阶较远。因此,为了图形简明清晰,本文仅关注该转子 1 阶

临界附近的不确定性振动响应。

表 1 转子系统的物理参数

Table 1 Physical parameters of the rotor system

物理参数	描述	数值
$E/10^{11}$ (N/m ²)	弹性模量	2.1
L_1 /m	轴段 1 长度	0.05
L_2 /m	轴段 2 长度	0.96
L_3 /m	轴段 3 长度	0.24
D /m	轴直径	0.03
$K_1/10^8$ (N/m)	支承 1 刚度	1
$K_2/10^6$ (N/m)	支承 2 刚度	1
$C/((N \cdot s)/m)$	黏性阻尼	200
m /kg	盘质量	20
$e/10^{-5}$ m	偏心距	8
$\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	密度	7800
$I_p/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	极惯性矩	0.6250
$I_d/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	直径转动惯量	0.3125

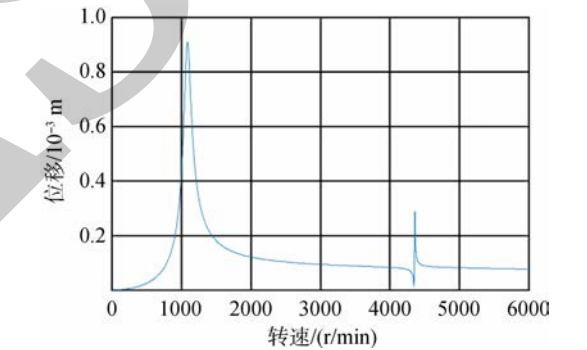


图 2 转子确定性稳态响应

Fig. 2 Deterministic steady state response of the rotor

3.2 两种正交多项式求解转子系统区间响应的精度和效率对比分析

为了检验正交多项式在分析含区间不确定性参数转子系统动态响应中的可行性、各自的精度以及计算效率,首先将转子支承 2 的刚度 K_2 视为未知而有界的区间变量,用区间形式表示为

$$K_2^I = [\underline{K}_2, \bar{K}_2] = [K_2^c - \beta_{K_2} K_2^c, K_2^c + \beta_{K_2} K_2^c] \tag{21}$$

式中 β_{K_2} 为其不确定水平,其他符号意义可参考式(2)。本节计算中,为验证在较大不确定性时方法的适用性,取 $\beta_{K_2} = 15\%$ 。根据文中第 2.3 节中的计算步骤,分别采用 Chebyshev 多项式和 Legendre 多项式进行区间分析求解系统的区间响

应,分别由响应上界(upper bound, UB)和下界(lower bound, LB)表示。计算所用展开阶数和积分点数分别为 3 和 5。Monte Carlo 模拟^[22]作为一种抽样方法被广泛用于验证新计算方法的准确性和计算效率,如振动系统区间方法校核^[23]及验证转子系统区间不确定性分析结果^[17]。为了对比两种多项式构成的非嵌入式区间方法的精度

和效率,本文利用 Monte Carlo 抽样来进行结果验证。选取抽样次数分别为 100 次和 500 次,围绕临界附近选取 5 个转速,计算得到的不确定性动态响应范围上下界如表 2 所示,其中 R 为挠度。表 3 给出了同一转速每种方法的平均计算耗时。

表 2 Monte Carlo 抽样法和基于两种多项式的转子挠度区间响应边界

Table 2 Deflection bounds of the disc obtained from the Monte Carlo simulation and the two polynomial methods

μm

转速/ (r/min)	MCS(100 样本)		MCS(500 样本)		Chebyshev($N=3,\lambda=5$)		Legendre($N=3,\lambda=5$)	
	R_{LB}	R_{UB}	R_{LB}	R_{UB}	R_{LB}	R_{UB}	R_{LB}	R_{UB}
900	158.96	231.41	159.81	234.96	159.80	236.04	159.81	236.04
1000	326.12	616.55	324.29	618.67	324.29	618.86	324.29	618.86
1100	663.69	920.39	648.00	920.44	647.99	919.78	648.00	920.01
1200	340.28	565.64	339.88	567.55	339.89	567.70	339.88	567.69
1300	238.57	326.79	239.13	327.43	239.13	327.44	239.13	327.42

表 3 每种方法的平均计算时间

Table 3 Average cost of computing time for each method

计算方法	MCS(100 样本)	MCS(500 样本)	Chebyshev($N=3,\lambda=5$)	Legendre($N=3,\lambda=5$)
所用时间/s	118.7	613.2	15.5	33.2

从表 2 可以看出,两种正交多项式方法与 Monte Carlo 抽样 500 次结果很接近,误差小于 1%,这验证了它们在转子不确定性区间响应分析中的可行性和精度。另外,Chebyshev 方法和 Legendre 方法两者所得结果也差异很小,均具有高精度、非嵌入式的优点,即利用较低展开阶次和较少积分点数就能达到很好的逼近效果,同时不需要对原有确定性模型的求解方法进行修改。

根据表 3,这两种区间方法计算时间为 Monte Carlo 模拟 500 样本计算时间的 2.5%和 5.4%,说明区间分析法的高效优势。从表 3 结果不难发现,Chebyshev 多项式区间分析法比 Legendre 方法计算时间明显要少,证明在计算该转子的区间特性时,前者具有更高效率。这是由多项式积分特点和本身结构所致。

3.3 多源不确定性不同不确定水平下的转子响应范围

基于上述分析,选用 Chebyshev 正交多项式区间分析法,按照文中第 2.3 节的计算步骤,分别将黏性阻尼 C 、支承刚度 K_2 视为不确定区间参

数,得到相应的在不确定水平为 5%和 10%情况下的不确定动态响应范围,如图 3~图 4 所示。将两个支承刚度与材料的弹性模量均视为不确定区间变量,得到不确定系统的响应范围如图 5 所示。

从图 3~图 5 可以看到,不确定性对该转子的动力特性影响很大,原来确定性的响应在不确定性的影响下变成了一个响应范围。随着不确定性增大,响应可能取值的范围也增大。在临界区,不确定性的影响比其他区域要大。如图 3 所示,阻尼不确定性只影响振动峰值大小而不改变共振峰的位置,且上下界关于确定性曲线是对称的。

在图 4 和图 5 中,在共振峰处振幅最大值改变较小,最小值变化很大。与确定性情形相比,在不确定性存在时,在临界转速附近的一个转速范围内,系统的振幅都很大,形似一个高振幅带。另一个现象就是出现了峰值偏移,上界右偏,下界左偏,这与系统的临界转速有关。不确定性在一定程度上改变了系统的临界转速位置。

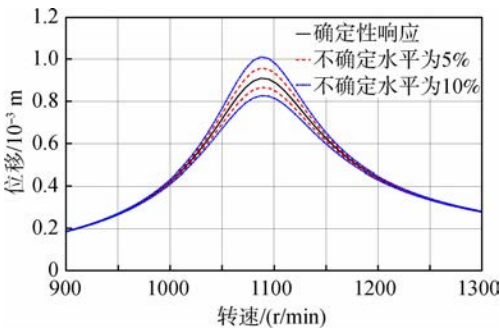


图 3 阻尼不确定时转子的动态响应
Fig. 3 Dynamic response with uncertain viscous damping

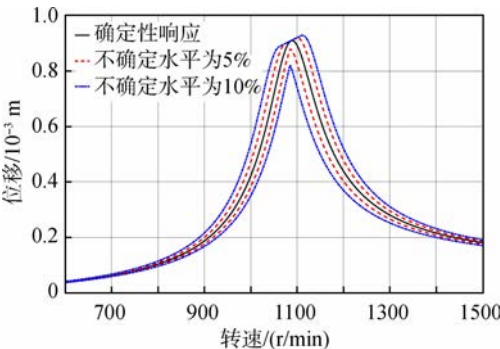


图 4 支承 2 刚度不确定时转子的动态响应
Fig. 4 Dynamic response with uncertain stiffness of support 2

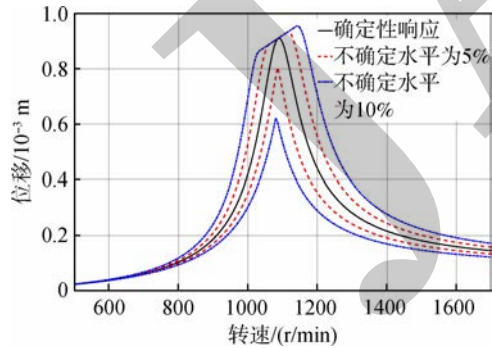


图 5 多参数不确定时转子的动态响应
Fig. 5 Dynamic response with multiple uncertainties

4 结 论

本文考虑非概率不确定性参数的影响,介绍了正交多项式在计算含区间不确定性转子系统动态响应计算中的应用和计算步骤。其可行性和精度通过与 Monte Carlo 抽样法对比而得到证实。通过比较几个特定转速下计算结果,发现 Chebyshev 多项式和 Legendre 多项式在本文转子系统区间响应计算中均具有很高精度,但前者具有更

高计算效率。选定不同不确定参数,分析了两种典型不确定性水平情况下转子的动力响应范围。结果表明,参数不确定性对该悬臂转子稳态响应影响很大,且其随着不确定水平增大而增大。共振区受不确定性影响较为明显,而在其他区域相对较弱。转子的共振区会被扩展,系统临界转速也出现不同程度的改变。

参考文献:

[1] 路振勇,陈予恕,李洪亮,等. 航空发动机转子系统动力学模型的可逆简化方法[J]. 航空动力学报,2016,31(1): 57-64.
LU Zhenyong, CHEN Yushu, LI Hongliang, et al. Reversible model-simplifying method for aero-engine rotor systems[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(1): 57-64. (in Chinese)
[2] 邓旺群,唐广,高德平. 转子动力特性及动平衡研究综述[J]. 燃气涡轮试验与研究,2008,21(2): 57-62.
DENG Wangqun, TANG Guang, GAO Deping. Research summary of rotor dynamic characteristics and dynamic balance[J]. Gas Turbin Experiment and Research, 2008, 21(2): 57-62. (in Chinese)
[3] 黄晶晶,郑龙席,王治武,等. 双盘转子系统动力特性分析及优化设计[J]. 推进技术,2014,35(11): 1530-1536.
HUANG Jingjing, ZHENG Longxi, WANG Zhiwu, et al. Dynamic characteristics analysis and optimization of a two-disk rotor system[J]. Journal of Propulsion Technology, 2014, 35(11): 1530-1536. (in Chinese)
[4] 李忠刚,陈照波,朱伟东,等. 盘式分布拉杆转子系统扭转振动非线性动力学特性分析[J]. 振动与冲击,2017,36(3): 215-221.
LI Zhonggang, CHEN Zhaobo, ZHU Weidong, et al. Non-linear dynamic characteristics analysis for torsional vibration of a distributed disk-rod-fastening rotor system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(3): 215-221. (in Chinese)
[5] 于海,陈予恕,曹庆杰. 多自由度裂纹转子系统非线性动力学特性分析[J]. 振动与冲击,2014,33(7): 92-98.
YU Hai, CHEN Yushu, CAO Qingjie. Nonlinear dynamic behavior analysis for a cracked multi-DOF rotor system[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(7): 92-98. (in Chinese)
[6] 白长青,张红艳. 不确定性转子系统的随机有限元建模及响应分析[J]. 动力学与控制学报,2012,10(3): 283-288.
BAI Changqing, ZHANG Hongyan. Stochastic finite element modeling and response analysis of uncertain rotor systems[J]. Journal of Dynamics and Control, 2012, 10(3): 283-288. (in Chinese)
[7] YANG Yongfeng, JIANG Tingdong, REN Zhong, et al. Rationalize the irrational and fractional expressions in non-linear analysis[J]. Modern Physics Letters B, 2016, 30(4): 1650068. 1-1650068. 9.

[8] 游震洲,黄其祥,王锋,等. 转子-基础系统的随机不确定建模与振动分析[J]. 航空动力学报,2016,31(1):1-9.
YOU Zhenzhou, HUANG Qixiang, WANG Feng, et al. Random uncertainty modelling and vibration analysis of rotor-foundation system[J]. Journal of Aerospace Power, 2016,31(1):1-9. (in Chinese)

[9] DIDIER J, SINOUE J J, FAVERJON B. Nonlinear vibrations of a mechanical system with non-regular nonlinearities and uncertainties [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2013, 18 (11): 3250-3270.

[10] MURTHY R, TOMEI J C, WANG X Q, et al. Nonparametric stochastic modeling of structural uncertainty in rotordynamics: unbalance and balancing aspects [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2014, 136(6): 062506. 1-062506. 12.

[11] SINOUE J J, JACQUELIN E. Influence of polynomial chaos expansion order on an uncertain asymmetric rotor system response [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2015, 50/51: 718-731.

[12] DARÓCZY L, JANIGA G, THÉVENIN G. Analysis of the performance of a H-Darrieus rotor under uncertainty using Polynomial Chaos Expansion [J]. Energy, 2016, 113: 399-412.

[13] 向玲,王子瑞,唐贵基. 不确定转子耦合系统的经验参数研究[J]. 振动、测试与诊断,2013,33(3):450-455.
XIANG Ling, WANG Zirui, TANG Guiji. Empirical parametric study of uncertain rotor coupling system [J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2013, 33(3): 450-455. (in Chinese)

[14] QIU Yazhao, RAO S S. A fuzzy approach for the analysis of unbalanced nonlinear rotor systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 284(1): 299-323.

[15] 郝勇,陈萌,洪杰,等. 基于泰勒展开法的转子系统动力特性区间分析方法[J]. 航空动力学报,2014,29(3):571-577.
HAO Yong, CHEN Meng, HONG Jie, et al. Interval analysis method of rotordynamics based on Taylor expansion method [J]. Journal of Aerospace Power, 2014, 29(3): 571-577. (in Chinese)

[16] 王军,洪杰,陈萌,等. 航空发动机转子系统动力特性的非概率分析[J]. 航空动力学报,2012,27(1):75-81.
WANAG Jun, HONG Jie, CHEN Meng, et al. Non-probabilistic analysis on aero-engine rotor dynamics [J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(1): 75-81. (in Chinese)

[17] MA Yanhong, LIANG Zhichao, CHEN Meng, et al. Interval analysis of rotor dynamic response with uncertain parameters [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332 (16): 3869-3880.

[18] 傅超,任兴民,杨永锋,等. 考虑参数不确定性的转子系统瞬态动平衡研究[J]. 动力学与控制学报,2017,15(5):463-468.
FU Chao, REN Xingmin, YANG Yongfeng, et al. Transient dynamic balancing of rotor system with uncertainties [J]. Journal of Dynamics and Control, 2017, 15(5): 463-468. (in Chinese)

[19] QI Wuchao, QIU Zhiping. A collocation interval analysis method for interval structural parameters and stochastic excitation [J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2012, 55(1): 66-77.

[20] WU Jinglai, ZHANG Yunqing, CHEN Liping, et al. A Chebyshev interval method for nonlinear dynamic systems under uncertainty [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4578-4591.

[21] CHANTRASMI T, DOOSTAN A, IACCARINO G. Padé-Legendre approximants for uncertainty analysis with discontinuous response surfaces [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(19): 7159-7180.

[22] ROBERT C P. Monte Carlo methods [M]. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2004.

[23] DIMAROGONAS A D. Interval analysis of vibrating systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 183(4): 739-749.

(编辑:李岩梅)